ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

***

CONCOURS D'ADMISSION 1987

***

MATHÉMATIQUES
2ème ÉPREUVE
OPTION T.A.
(Durée de l'épreuve 4 heures)

Dans le problème, f', f'' ..., $f^{(p)}$ ou $D^p f$ désignent les dérivées successives d'une fonction f.

Etant donnés 2 nombres réels a et b, $a < b$, on désigne par $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales réelles sur l'intervalle $I =]a, b[$. Un élément de $\mathcal{P}$ est dit unitaire si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

On suppose donnés des polynômes A et B, $A(t) = (t - a)(t - b)$ et $B(t)$ de degré égal à 1 mis sous la forme $B(t) = \alpha(t - b) + \beta(t - a)$ où α et β sont des réels strictement positifs. Soit λ un nombre réel ; on se propose d'étudier les fonctions polynômiales $t \longmapsto x(t)$ solutions sur I de l'équation différentielle linéaire :

$E(\alpha, \beta, \lambda)$ $\qquad A x'' + B x' - \lambda x = 0$

PARTIE I - ETUDE ALGEBRIQUE

I.1. A l'aide de considérations sur les degrés, montrer que si x est une solution polynômiale non nulle de degré n, où $n \geqslant 0$, de l'équation $E(\alpha, \beta, \lambda)$ alors nécessairement :

$$\lambda = n(n - 1) + n(\alpha + \beta).$$

I.2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\lambda_n = n(n - 1) + n(\alpha + \beta).$$

Montrer que les nombres λ_n, où $n \geqslant 0$, sont distincts deux à deux.

I.3. On note plus simplement $E_n(\alpha, \beta)$ l'équation différentielle $E(\alpha, \beta, \lambda_n)$.

a) Quelles sont les solutions polynômiales de $E_o(\alpha, \beta)$?

b) Montrer que si x est une solution polynômiale de $E_n(\alpha, \beta)$ où $n \geqslant 1$, alors $y = x'$ est une solution polynômiale de $E_{n-1}(\alpha + 1, \beta + 1)$.

c) Inversement montrer que si y est une solution polynômiale de $E_{n-1}(\alpha + 1, \beta + 1)$, où $n \geqslant 1$, alors $x = \frac{1}{\lambda_n}(Ay' + By)$ admet y pour dérivée et x est une solution polynômiale de $E_n(\alpha, \beta)$.

d) Prouver que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n unitaire de degré n, solution de $E_n(\alpha, \beta)$. (On pourra utiliser c)).

e) Démontrer l'unicité d'une telle solution P_n de l'équation $E_n(\alpha, \beta)$.

PARTIE II - EMPLOI D'UN MULTIPLICATEUR

Soit $u_{\alpha,\beta}$ l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par : $u_{\alpha,\beta}(x) = Ax'' + Bx'$.

On dit qu'une fonction f, non nulle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur]a,b[est un multiplicateur de $u_{\alpha,\beta}$ si pour tout élément x de $\mathcal{P}$:

$$(f\,A\,x')' = f\cdot(Ax'' + Bx') = f\cdot u_{\alpha,\beta}(x).$$

II.1. a) Montrer que f est un multiplicateur de $u_{\alpha,\beta}$ si et seulement si :

$$(1) \qquad (fA)' = fB.$$

b) En déduire que tout multiplicateur f de l'endomorphisme $u_{\alpha,\beta}$ est proportionnel à la fonction r définie sur]a, b[par la relation :

$$(2) \qquad r(t) = (t-a)^{\alpha-1}\,(b-t)^{\beta-1}$$

II.2. a) Montrer que, si f est un multiplicateur de $u_{\alpha,\beta}$, alors pour tout entier p tel que $p \geqslant 1$, fA^p est un multiplicateur de $u_{\alpha+p,\ \beta+p}$.

b) Soit P_n la solution de $E_n(\alpha,\beta)$ polynômiale unitaire de degré n. Prouver, par récurrence, que si l'entier p vérifie $1 \leqslant p \leqslant n$, fP_n est proportionnel à $D^p\left[fA^p\ D^pP_n\right]$, où f désigne un multiplicateur de $u_{\alpha,\beta}$. (On pourra utiliser la propriété démontrée en I.3.b).

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, il existe un nombre réel k_n non nul tel que :

$$D^n\left(rA^n\right) = k_n\,rP_n.$$

II.3. En utilisant la relation (2), expliciter $D^n\left(rA^n\right)$. En déduire k_n et exprimer P_n dans la base des polynômes $(t-a)^p(t-b)^q$ ou $p + q = n$.

II.4. Pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathcal{P}$, on pose :

$$(x|y) = \int_a^b r(t)\,x(t)\,y(t)\,dt.$$

a) Prouver que cette intégrale est convergente et montrer que l'on obtient ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

b) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{P}^2 \quad \left(u_{\alpha,\beta}(x)\,|\,y\right) = \left(x\,|\,u_{\alpha,\beta}(y)\right) = -\int_a^b x'(t)\,y'(t)\,A(t)\,r(t)\,dt.$$

c) En déduire que les polynômes P_n sont orthogonaux deux à deux pour ce produit scalaire.

d) Prouver, sans utiliser les résultats de la question II.2., que, pour tout polynôme y de degré strictement inférieur à n, $\left(\frac{1}{r}\,D^n(rA^n)\,|\,y\right) = 0$.

Retrouver ainsi, sans calcul, le résultat de la question II.2. c).

***